РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ТОКМАНЦЕВ Тимофей Борисович

Обобщенный метод характеристик в решении задач оптимального управления с фиксированным моментом окончания

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2011

Работа выполнена в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Субботина Нина Николаевна
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук Гусев Михаил Иванович, кандидат физико–математических наук Вахрушев Виктор Александрович
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМиК

Защита состоится 27 апреля 2011 г. в 13 часов на заседании специализированного диссертационного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН, расположенном по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «24» марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико–математических наук Н.Ю. Лукоянов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Работа посвящена исследованию свойств задачи оптимального управления с фиксированным моментом окончания и роли характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в численном решении этой задачи. Предлагается конструкция сеточного оптимального синтеза и исследуется ее эффективность. Разработаны и протестированы на ряде модельных задач оптимального управления программные реализации предложенных алгоритмов. Рассмотрено приложение конструкции сеточного оптимального синтеза к исследованию макроэкономической модели.

Истоки теории оптимального управления восходят к работам Л. С. Понтрягина[1], R. Bellman[2], Н. Н. Красовского[3], R. Isaacs, W. H. Fleming, A. Fridman.

Фундаментальный вклад в развитие теории оптимального управления внесли В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Б.Н. Пшеничный, Н.Н. Моисеев, Ф.Л. Черноусько, В.А. Якубович, Ю.Г. Евтушенко, L.D. Berkovitz, A.E. Bryson, F.H. Clarke, G. Leitmann, Y.-C. Ho, R. Olsder, E.O. Roxin, J. Warga, R.J. Elliott, N.J. Kalton.

Существенное развитие теория получила в работах В.И. Зубова, Ф.М. Кирилловой, Р.Ф. Габасова, В.Ф. Кротова, А.А. Меликяна, А.А. Чикрия, С.М. Асеева, А.А. Аграчева, Л.Д. Акуленко, А.В. Арутюнова, В.И. Благодатских, Н.Л. Григоренко, А.Я. Дубовицкого, А.В. Дмитрука, В.А. Дыхты, В.И. Жуковского, М.И. Зеликина, А.Д. Иоффе, Ю.С. Ледяева, А.А. Милютина, М.С. Никольского, Г.К. Пожарицкого, Е.С. Половинкина, Н.Н. Петрова, Л.А. Петросяна, В.М. Тихомирова, Е.Л. Тонкова, В.И. Ухоботова, С.В. Чистякова.

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1961

[2] Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Univ. Press, 1957

[3] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968

Настоящая работа лежит в рамках концепции оптимального позиционного управления, предложенной и развитой в работах Н.Н. Красовского[4].

Фундаментальный вклад в развитие теории позиционного управления, наблюдения, оценивания и динамической реконструкции внесли работы Ю.С. Осипова, А.Б. Куржанского, А.И. Субботина, А.В. Кряжимского, А.Г. Ченцова, В.Н. Ушакова, В.Е. Третьякова.

Большую роль в развитии теории оптимального позиционного управления сыграли работы Э.Г. Альбрехта, М.И. Гусева, С.Т. Завалищина, А.Ф. Клейменова, А.И. Короткого, Е.К. Костоусовой, А.Н. Красовского, Н.Ю. Лукоянова, В.И. Максимова, О.И. Никонова, В.С. Пацко, В.Г. Пименова, А.Н. Сесекина, Н.Н. Субботиной, А.М. Тарасьева, Т.Ф. Филипповой, А.Ф. Шорикова, В.Я. Джафарова, Х.Г. Гусейнова и их учеников.

Ключевым понятием в теории оптимального позиционного управления является функция цены, которая начальному состоянию управляемой системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат. Эта функция лежит в основе конструкции оптимального синтеза — оптимального управления по принципу обратной связи.

Как правило, функция цены в рассматриваемых задачах оптимального управления является негладкой. Хорошо известно, что в точках дифференцируемости она удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка (уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана), связанному с изучаемой задачей управления. В современной теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби доказано, что функция цены для задачи управления совпадает с единственным минимаксным[5]/вязкостным[6] решением соответствую-

---

[4] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974

[5] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003

[6] Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamiltion–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. Pp. 1–42.

щей краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

В случае, когда существует классическое (гладкое) решение задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, оно может быть построено с помощью классического метода характеристик Коши[7]. Этот метод сводит интегрирование уравнения в частных производных первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой называются характеристиками. Как доказано в работах F.H. Clarke, N. Barron, S. Mirica, Н.Н. Субботиной[8] , использование классических характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана обеспечивает исследователя необходимыми и достаточными условиями оптимальности в классе программных управлений.

В современной теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби и соответствующих задач динамической оптимизации рассматриваются различные обобщения понятия характеристики. Новые подходы к определению обобщенных характеристик предложены в работах А.И. Субботина, А.Б. Куржанского, Ю.С. Ледяева, А.А. Меликяна, В.И. Благодатских, А.А. Толстоногова, А.Ф. Филиппова, А.И. Булгакова, J.P. Aubin, A. Cellina, H. Frankowska, G. Haddad.

Тем не менее, актуальной задачей остается использование классических характеристик для конструирования обобщенных решений и построения оптимального синтеза в соответствующих задачах оптимального управления.

К настоящему времени разработано большое количество численных методов решения задач оптимального управления. Среди них можно выделить две группы методов. К первой относятся методы, нацеленные на построение оптимального программного управления: методы, основывающиеся на решении

[7] Курант Р. Уравнения с частными производными. Москва: Мир, 1964.

[8] Subbotina N. N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations and applications to dynamical optimization. NY: Springer, 2006

двухточечной краевой задачи, следующей из принципа максимума Л.С. Понтрягина; методы последовательных приближений; градиентные методы в пространстве управлений, методы, опирающиеся на конструирование областей достижимости. Разработке этих методов посвящены работы Ф.П. Васильева, В.Л. Гасилова, В.Б. Костоусова, Ю.И. Бердышева, Ю.Н. Киселева, Н.Н. Болотника, И.М. Ананьевского, Б.Н. Соколова, Н.В. Баничука, Д.В. Камзолкина и многих других известных математиков.

Вторую группу составляют методы, нацеленные на построение оптимального синтеза, основанные на методе динамического программирования и связанные с решением уравнения Гамильтона–Якоби. Существенный вклад в развитие этого направления внесли работы В.Н. Ушакова, В.С. Пацко, А.М. Тарасьева, А.Г. Пашкова, С.И. Кумкова, А.А. Успенского, P. Souganidis, M. Falcone. Численные алгоритмы конструкций позиционного оптимального управления успешно разрабатывались в работах В.А. Вахрушева, В.Л. Туровой, С.С. Кумкова, Д.А. Серкова, Л.Г. Шагаловой, А.П. Хрипунова.

Несмотря на обилие предложенных методов, исследование роли классических характеристик в конструкциях эффективных методов оптимального позиционного управления остается актуальной задачей.

Цели диссертационной работы. Исследование свойств функции цены задачи оптимального управления с непрерывными по времени и дифференцируемыми по фазовой переменной входными данными; разработка и обоснование численных методов аппроксимации функции цены и построения сеточного оптимального синтеза в рассматриваемой задаче оптимального управления на базе классических характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана; программная реализация численных методов и решение модельных задач теории оптимального управления; приложение конструкций сеточного оптимального синтеза к анализу модели макроэкономической системы.

Методы исследования. Основным методом исследований является обобщение классического метода характеристик Коши. Для анализа минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби применяются методы и аппарат негладкого анализа.

Для доказательства оптимальности предлагаемых конструкций сеточного синтеза применяются необходимое условие — принцип максимума Л.С. Понтрягина в гамильтоновой форме, и достаточное условие в терминах супердифференциала функции цены, предложенное Н.Н. Субботиной.

При выводе оценки скорости сходимости процедуры построения аппроксимации функции цены были использованы методы теории рекурсии[9]. При этом для получения констант применялся пакет Matlab.

Предложенные численные алгоритмы реализованы автором в виде программы на языке C++ с использованием методов вычислительной геометрии.

Научная новизна. Предложен новый метод решения задачи оптимального управления с фиксированным моментом окончания, при котором для нахождения оптимальных траекторий решается краевая задача Коши, где краевые условия для фазовой и сопряженной переменных заданы в один и тот же конечный момент времени (в отличие от стандартной двухточечной краевой задачи в принципе максимума Л.С. Понтрягина). Предложены новые конструкции численной аппроксимации функции цены и сеточного оптимального синтеза, определенные в узлах адаптивных сеток, лежащих на численных решениях характеристической системы.

Получена оценка точности аппроксимации функции цены, которая линейно зависит от шага интегрирования (в отличие от сеточных методов, использующих равномерные сетки, где оценка точности линейно зависит от корня квадратного из шага интегрирования).

Получена оценка качества управления с помощью сеточного оптимального-

[9] Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. Москва: Мир, 1987.

ного синтеза (оценка эффективности), которая линейно зависит от шага интегрирования. При оценке эффективности сеточного оптимального синтеза применяется оригинальный подход на базе теории рекурсии.

Новым приложением конструкций сеточного оптимального синтеза является использование их для анализа динамики макроэкономической модели на основе накопленной дискретной статистики.

Теоретическая и практическая ценность. Предложенные методы могут применяться при решении достаточно широкого класса задач управления с терминально–интегральным функционалом, где обеспечены условия существования, единственности и продолжимости классических характеристик соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Основные результаты диссертации.

- Для задачи оптимального управления с фиксированным моментом окончания доказаны теоремы о структуре функции цены и супердифференциала функции цены в терминах классических характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

- Предложены численные методы аппроксимации функции цены и оптимального синтеза. Получены оценки численных аппроксимаций.

- Программные реализации численных алгоритмов разработаны и протестированы на решении модельных задач оптимального управления, а также применены к решению задачи идентификации макроэкономической модели.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: 37-ой, 38-ой региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2006, 2007); научной конференции "Демидовские чтения на Урале" (Екатеринбург, 2006); научной конференции "Теория управления и математическое моделирование" (Ижевск, 2006); 9–ом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006); Всероссийской научной конференции "Математика. Механика. Информатика", посвященной 30–летию Челябинского государственного университета (Челябинск, 2006); 3–ей Международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления" памяти И.В. Прангишвили (Москва, 2006); Международном научной семинаре "Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений", посвященный 60-летию В.И. Благодатских (Москва, 2006); 14–ой Международной конференции по динамике и управлению (Москва – Звенигород, 2007); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г. Петровского (Москва, 2007); 9–ой Международной Четаевская конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением" (Иркутск, 2007); Международной конференции "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики" (Тамбов, 2007); конференции SIAM по оптимизации (Бостон, США, 2008); 13–ом Международном Симпозиуме по динамическим играм и приложениям (Вроцлав, Польша, 2008); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100–летию Л.С. Понтрягина (Москва, 2008); Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100–летию С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008); 10–ом Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" имени Е.С. Пятницкого (Москва, 2008); Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной 100–летию В.К. Иванова (Екатеринбург, 2008); 4–ой Международной конференции по физике и управлению (Катания, Италия, 2009); Международной конференции "Управление динамическими системами" (Москва, 2009); конференции, посвященной 60-летию А.В. Кряжимского (Москва, 2009); Международной конференции "Актуальные проблемы устойчивости и теории управления" (Екатеринбург, 2009); 3–ей и 4–ой Международных конференциях "Теория игр и менеджмент" (Санкт–Петербург, 2009, 2010); 3–ей Международной конференции "Математическое моделирование социальной и экономической динамики", Российский Государственный Социальный Университет (Москва, 2010); Всероссийской конференции "Устойчивость и процессы управления" (Санкт–Петербург, 2010); семинаре отдела динамических систем ИММ УрО РАН; семинаре кафедры оптимального управления ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Список публикаций автора по теме диссертации. Материалы диссертации опубликованы в 30 печатных работах, из них 5 статей в журналах из списка ВАК ([1–5]), 2 статьи в иностранных журналах ([6, 7]), 7 статей в рецензируемых журналах и сборниках трудов конференций([8–14]) и 16 тезисов докладов. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

Структура, объем и краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и библиографии. Общий объем диссертации 110 страниц, включая 28 рисунков. Библиография включает 56 наименований.

Известные результаты, использующиеся в данной работе, называются "утверждениями", в отличие от "теорем" — результатов автора.

Содержание работы

Во введении раскрываются цели и задачи работы, ее актуальность, а также кратко описываются основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе вводится задача оптимального управления, которая является основной задачей для глав с первой по четвертую, приводятся известные утверждения, которые использованы в диссертации. Глава состоит из шести параграфов.

В первом параграфе приводится постановка задачи. Рассматривается динамическая управляемая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x, u), \tag{1}$$

на фиксированном отрезке времени $t \in [0, T]$, фазовый вектор системы $x \in \mathbb{R}^n$, на управление наложены геометрические ограничения $u \in P$, $P \subset \mathbb{R}^m$ — компакт. Символы Π_T и $\operatorname{cl}\Pi_T$ обозначают полосы в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{cl}\Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Символ $U(t_0, T)$, $t_0 \in [0, T]$, обозначает множество допустимых управлений — измеримых функций $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto P$, называемых программами.

Траектория динамической системы (1), выходящая из начальной точки $(t_0, x_0) \in \operatorname{cl}\Pi_T$ под воздействием управления $u(\cdot) \in U(t_0, T)$, обозначается символом $x(\cdot) = x\big(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)\big) : [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$.

Качество управления $u(\cdot)$ оценивается с помощью функционала Больца

$$I\big(t_0, x_0; u(\cdot)\big) = \sigma\Big(x\big(T; t_0, x_0, u(\cdot)\big)\Big) + \int_{t_0}^{T} g\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt. \tag{2}$$

Оптимальный программный результат (цена) $V(t_0, x_0)$ для произвольной начальной точки $(t_0, x_0) \in \operatorname{cl}\Pi_T$ имеет вид:

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in U(t_0, T)} I\big(t_0, x_0; u(\cdot)\big). \tag{3}$$

Функцией цены в задаче (1)–(2) называется отображение

$$V\colon (t_0, x_0) \mapsto V(t_0, x_0)\colon \operatorname{cl}\Pi_T \to \mathbb{R}. \tag{4}$$

Во втором параграфе приведены стандартные требования A_1–A_4 на входные данные задачи оптимального управления (1)–(2).

В третьем параграфе введена эквивалентная задаче оптимального управления (1)–(2) задача Коши для уравнения Беллмана:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + H\big(t,x,D_x v(t,x)\big) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \tag{5}$$

$$H(t,x,p) = \min_{u\in P}\Big[\langle p, f(t,x,u)\rangle + g(t,x,u)\Big], \tag{6}$$

$$D_x v(t,x) = \left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_n}\right),$$

где краевое условие имеет вид

$$v(T,x) = \sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

В четвертом параграфе вводится характеристическая система задачи (5)–(7):

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{x}}{dt} = & D_{\widehat{p}}H(t,\widehat{x},\widehat{p}), \\ \frac{d\widehat{p}}{dt} = & -D_{\widehat{x}}H(t,\widehat{x},\widehat{p}), \\ \frac{d\widehat{z}}{dt} = & \langle\widehat{p}, D_{\widehat{p}}H(t,\widehat{x},\widehat{p})\rangle - H(t,\widehat{x},\widehat{p}), \end{cases} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\widehat{x}(T,y) = y, \ \widehat{p}(T,y) = D\sigma(y), \ \widehat{z}(T,y) = \sigma(y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Решения $\big(\widehat{x}(\cdot,y), \widehat{p}(\cdot,y), \widehat{z}(\cdot,y)\big)$ системы (8) называются характеристиками задачи (5)—(7). Приведен классический метод характеристик Коши для построения гладкого решения в задаче (5)—(7).

В пятом параграфе приводится определение минимаксного (негладкого) решения задачи Коши для уравнения Беллмана. Приводится утверждение о совпадении функции цены задачи оптимального управления (1)–(2) с единственным минимаксным решением задачи (5)—(7). Приводится репрезентативная формула функции цены в терминах классических характеристик. Формулируется утверждение о необходимых и достаточных условиях оптимальности в гамильтоновой форме, дополняющих принцип максимума Л.С. Понтрягина. Приводится определение оптимального синтеза согласно формализации Н.Н. Красовского и сформулировано утверждение о конструкции оптимального синтеза в задаче оптимального управления (1)–(2)

Шестой параграф содержит полезные сведения из негладкого анализа.

Во второй главе приводятся результаты исследования задачи оптимального управления (1)–(2) при условиях A_1'–A_4' на входные данные.

В первом параграфе формулируются предположения.

A_1'. Функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$ в (1), (2) определены и непрерывны на $\mathrm{cl}\,\Pi_T\times P$, существуют непрерывные по $(t,x,u)\in\Pi_T\times P$ частные производные $\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial g(t,x,u)}{\partial x_j}$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,n}$, ограниченные константой $L_1>0$.

A_2'. Терминальная функция платы $\sigma(x)$ в (2) определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial\sigma}{\partial x_i}$, $i\in\overline{1,n}$.

A_3'. Для любой точки $(t,x)\in\mathrm{cl}\,\Pi_T$ и вектора $p\in\mathbb{R}^n$ множество

$$\operatorname{Arg\,min}\Big\{\langle p,f\rangle+g\colon (f,g)\in\Big\{\big(f(t,x,u),g(t,x,u)\big)\,:\;u\in P\Big\}\Big\},$$

состоит из единственного элемента $\big(f^0(t,x,p),g^0(t,x,p)\big)$.

A_4'. Существуют непрерывные по совокупности переменных и ограниченные в области $(t,x,p)\in\Pi_T\times\mathbb{R}^n$ частные производные $\frac{\partial f_i^0(t,x,p)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i^0(t,x,p)}{\partial p_j}$, $\frac{\partial g^0(t,x,p)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial g^0(t,x,p)}{\partial p_j}$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,n}$.

Условия A_1'–A_4' обеспечивают существование, единственность и продолжимость решений характеристической системы (8)–(9).

Во втором параграфе доказываются теоремы о свойствах функции цены.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1)–(4) *выполнены условия* A_1'–A_4'. *Функция цены* $V(t,x)$ *может быть представлена в виде*

$$V(t,x)=\min_{\alpha\in A}\omega(t,x,\alpha),$$

где параметр α принимает значения из метрического компакта A, функция $\omega(t,x,\alpha)$ непрерывна на множестве $\operatorname{cl}\Pi_T \times A$, *существуют частные производные* $\dfrac{\partial\omega(t,x,\alpha)}{\partial x_i}$, $i \in \overline{1,n}$, *непрерывные на множестве* $\operatorname{cl}\Pi_T \times A$.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1)–(4) *выполнены условия* A_1'–A_4'. *Функция цены* $V(t,x)$ (4) *задачи имеет следующее представление*

$$V(t,x) = \min_{y\in Y(t,x)} \widehat{z}(t,y), \quad Y(t,x) = \{y \in R^n \colon \widehat{x}(t,y) = x\}, \tag{10}$$

где $\widehat{x}(\cdot,y)$, $\widehat{z}(\cdot,y)$ — *характеристики* (8), (9) *уравнения Беллмана* (5).

Для произвольного компактного множества $G_0 \subset \operatorname{cl}\Pi_T$ введены в рассмотрение множество $G(G_0) \subset \operatorname{cl}\Pi_T$ и множество $P(G_0)$ такие, что

$$G(G_0) = \{(t,x) \in \operatorname{cl}\Pi_T \mid \exists\widehat{x}(\cdot,y) - \text{решения (8), (9)}, \ \exists(t_0,x_0) \in G_0 \colon \tag{11}$$
$$\widehat{x}(t_0,y) = x_0, \widehat{x}(t,y) = x\},$$

$$P(G_0) = \{p = \widehat{p}(t,y) \in \mathbb{R}^n \colon (t,\widehat{x}(t,y)) \in G(G_0)\}. \tag{12}$$

Символ $B_k^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^k \colon \|y\| \le \varepsilon\}$ обозначает шар радиуса $\varepsilon > 0$. Рассматриваются множества $G^\varepsilon(G_0) = \big(G(G_0) + B_{n+1}^\varepsilon\big)$ и $P^\varepsilon(G_0) = \big(P(G_0) + B_n^\varepsilon\big)$.

Символом $\eta(\cdot)$ обозначен модуль непрерывности для функций $f^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$, $\frac{\partial f_i^0(t,x,p)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial g^0(t,x,p)}{\partial x_j}$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$, на множестве $G^\varepsilon(G_0) \times P^\varepsilon(G_0)$.

Теорема 3. *При выполнении условий* A_1' – A_4' *функция цены* $V(t,x)$ *задачи* (1)–(4) *непрерывна по совокупности переменных. Для любой компактной области* $G_0 \subset \operatorname{cl}\Pi_T$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие константы* $L^\varepsilon(G_0) > 0$, $\zeta_1^\varepsilon(G_0) > 0$, $\zeta_2^\varepsilon(G_0) > 0$, *что имеет место оценка*

$$|V(t',x') - V(t'',x'')| \le L^\varepsilon(G_0)\|x' - x''\| + \zeta_1^\varepsilon(G_0)|t'' - t'| + \zeta_2^\varepsilon(G_0)\eta(|t'' - t'|)$$

для всех (t',x'), $(t'',x'') \in G^\varepsilon(G_0) \subset \Pi_T$.

В третьем параграфе доказывается теорема 4 о структуре супердифференциала $\partial^+ V(t,x)$ функции цены:

$$\partial^+ V(t,x) = \{(\alpha,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n :$$
$$V(t+\Delta t, x+\Delta x) - V(t,x) \le \alpha \Delta t + \langle p, \Delta x\rangle + o(\|\Delta x\| + |\Delta t|)$$
$$\forall (t+\Delta t, x+\Delta x) \in B^{\varepsilon}_{n+1}(t,x)\},$$

где $\varepsilon > 0$, $B^{\varepsilon}_{n+1}(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|y - y_0\| \le \varepsilon\}$.

Теорема 4. *Если в задаче* (1) – (4) *выполнены условия* A'_1–A'_4, *то супердифференциал* $\partial^+ V(t,x)$ *функции цены* $V(t,x)$ *задачи* (1)–(2) *не пуст при всех* $(t,x) \in \mathrm{cl}\,\Pi_T$ *и имеет вид*

$$\partial^+ V(t,x) = \mathrm{co}\Big\{\Big(-H\big(t,\widehat{x}(t,y),\widehat{p}(t,y)\big),\widehat{p}(t,y)\Big) : \widehat{x}(t,y) = x, \widehat{z}(t,y) = V(t,x)\Big\}$$

где $\big(\widehat{x}(\cdot,y),\widehat{p}(\cdot,y),\widehat{z}(\cdot,y)\big)$ – *решения характеристической системы* (8)–(9).

В третьей главе предложен и обоснован алгоритм построения аппроксимации функции цены, основанный на теоретических результатах главы 2.

В первом параграфе описываются алгоритм, который опирается на попятную процедуру численного интегрирования системы (8)–(9).

Рассмотрено разбиение $\Gamma = \{t_i,\ i = 0,1,\ldots,N\}$ отрезка времени $[t_0, T]$ с шагом Δt. В момент $t = t_0$ рассмотрено компактное множество $\hat{G}_0 \subset \mathbb{R}^n$ начальных фазовых значений. Построено компактное множество $G(\{t_0\} \times \hat{G}_0)$ (11). Его сечение в момент $t = t_N$ обозначено символом $\hat{G}_N$.

На $\hat{G}_N$ определена равномерная сетка $Q_N = \{\widetilde{x}^j_N\}, j = (j_1,\ldots,j_n)$, с шагом по осям Δx. Через $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ обозначена сетка в момент $t = t_i$. Узлами сетки Q_i являются точки $\widetilde{x}^j_i$, лежащие в момент $t = t_i$ на характеристиках $\widetilde{x}(\cdot)$, которые в момент $t = T$ стартуют из точек $\widetilde{x}^j_N \in Q_N$.

Процедура численного интегрирования характеристической системы стартует в момент времени $t = T$ с краевыми условиями $\widetilde{x}^j(T) = \widetilde{x}^j_N$, $\widetilde{p}^j(T) =$

$D\sigma(\widetilde{x}^j_N)$, $\widetilde{z}^j(T) = \sigma(\widetilde{x}^j_N)$, учитывая достаточные условия оптимальности. Точные решения системы (оптимали) обозначены символом $\big(x^0_j(\cdot), p^0_j(\cdot), z^0_j(\cdot)\big)$, а их численные аппроксимации — символом $\big(\widetilde{x}^j(\cdot), \widetilde{p}^j(\cdot), \widetilde{z}^j(\cdot)\big)$.

В момент времени $t = t_{N-1}$ конструируется сетка Q_{N-1} и аппроксимация функции цены $\widetilde{V}(t_{N-1}, \widetilde{x}^{j^0}_{N-1})$ для каждого фиксированного индекса j^0 согласно теореме 2 и аппроксимационной формуле:

$$\tilde{V}(t_i, \widetilde{x}^{j^0}_i) = \min_{j:\, \|\widetilde{x}^j_i - \widetilde{x}^{j^0}_i\| \le \rho_x} \left\{ \tilde{V}(t_{i+1}, \widetilde{x}^j_{i+1}) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} g^0\big(\tau, \widetilde{x}^j(\tau), \widetilde{p}^j(\tau)\big) d\tau \right\}, \tag{13}$$

где $i = N - 1$, $\rho_x > 0$ — параметр аппроксимации.

В узлах $\widetilde{x}^{j^0}_{N-1}$ сетки Q_{N-1} строятся оптимальные направления:

$$f^{j^0}_{N-1} = f^0(t_{N-1}, \widetilde{x}^{j^0}_{N-1}, \widetilde{p}^{j^0}_{N-1}), \qquad g^{j^0}_{N-1} = g^0(t_{N-1}, \widetilde{x}^{j^0}_{N-1}, \widetilde{p}^{j^0}_{N-1}), \tag{14}$$

где $\widetilde{p}^{j^0}_{N-1} = \widetilde{p}^j(t_{N-1})\colon \widetilde{z}^j(t_{N-1}) = \widetilde{V}(t_{N-1}, \widetilde{x}^{j^0}(t_{N-1})) = \widetilde{z}^{j^0}(t_{N-1})$.

Далее эта процедура рекуррентно повторяется на интервалах $[t_i, t_{i+1}]$. Строятся сетки Q_i, $i = N-1, \ldots, 0$ с узлами $\widetilde{x}^{j^0}_i$. Выбираются $\widetilde{p}^{j^0}_i = \widetilde{p}^{j^*}(t_i)$: $\widetilde{z}^{j^0}_i = \widetilde{V}(t_i, \widetilde{x}^{j^0}_i) = \widetilde{z}^{j^*}_i$. Если таких индексов j^* находится несколько, то выбирается любой из них.

Узлы $\widetilde{x}^j_i$ сетки Q_i, $i = N-1, \ldots, 0$, в совокупности с $\widetilde{p}^j_i$, $\widetilde{z}^j_i$ являются краевыми условиями для интегрирования характеристической системы в обратном времени на интервале $[t_{i-1}, t_i]$. Результатом работы алгоритма при каждом $t = t_i$ является совокупность $S_i = \{(\widetilde{x}^j_i, \widetilde{z}^j_i, f^j_i, g^j_i)\}$, где $\widetilde{z}^j_i = \tilde{V}(t_i, \widetilde{x}^j_i)$, вектора (f^j_i, g^j_i) опрсделены в (14).

Во втором параграфе получена оценка точности аппроксимации функции цены. В дополнение к условиям A'_1–A'_4 вводится предположение:

A'_5. Модуль непрерывности η в области $G^\varepsilon(G_0) \times P^\varepsilon(G_0)$ удовлетворяет условию $\exists \delta_0 > 0$: $\eta(\delta) \le M\delta$, $\quad \forall\delta \in (0, \delta_0]$, где константа $M = M(G_0) \in (0, L_1)$, константа L_1 определена в условии A'_1.

Теорема 5. *В задаче* (1)–(2) *при выполнении условий* A_1'–A_5' *для любой компактной области* $G_0 \subset \mathrm{cl}\,\Pi_T$ *и любого параметра* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $R^\varepsilon(G_0) > 0$ *такая, что для произвольного узла* $(t_i, x^j) \in G^\varepsilon(G_0)$ (11), $t_i \in \Gamma$, $x^j \in Q_i$, *справедлива оценка:*

$$|V(t_i, x^j) - \tilde{V}(t_i, x^j)| \leq R^\varepsilon(G_0)\Delta t.$$

В третьем параграфе приводятся примеры использования программной реализации алгоритма для решения модельных задач в случае одномерного и двумерного фазового пространства. В качестве результата работы алгоритма приведены графики аппроксимации функции цены.

В четвертой главе предложен и обоснован алгоритм построения сеточного оптимального синтеза.

В первом параграфе при $t_i \in \Gamma$, в узлах сеток $x_i^j \in Q_i$ определен сеточный оптимальный синтез $u_\Delta^0(t_i, x_i^j)$. При этом используются оптимальные направления f_i^j, g_i^j, построенные в узлах сеток:

$$u_\Delta^0(t_i, x_i^j) \in \mathrm{Arg}\min_{u \in P}\{\|f(t_i, x_i^j, u) - f_i^j\| + |g(t_i, x_i^j, u) - g_i^j|\}.$$

Далее описан алгоритм применения сеточного оптимального синтеза для произвольной начальной точки $(t_*, x_*) \in \hat{G}_0 \subset \mathrm{cl}\,\Pi_T$, $t_* \in (t_0, t_1)$. Пользуясь произвольным постоянным управлением $u_* \in P$ находятся точки $x_1 = x_* + (t_1 - t_*)f(t_*, x_*, u_*)$ и $x_2 \in Q_1$, ближайшая к точке x_1:

$$d_0 = \|x_1 - x_2\| = \min_{x \in Q_1}\|x_1 - x\|. \qquad (15)$$

На интервале $[t_1, T]$ строится траектория $x_2(t) = x_2(t; t_1, x_2)$ системы (1), стартующая из точки (t_1, x_2) и порождаемая сеточным синтезом $u_\Delta^0(\cdot)$, то есть кусочно-линейное движение по оптимальным направлениям

$$f_i^{j^0} = f(t_i, x_2(t_i), u_\Delta^0(t_i, x_2(t_i))), \quad g_i^{j^0} = g(t_i, x_2(t_i), u_\Delta^0(t_i, x_2(t_i))).$$

Из начальной точки (t_*, x_*) строится пошаговое движение $x_1(\cdot)$, порождаемое управлением $u_*^0(\cdot)$ с помощью сеточного оптимального синтеза $u_\Delta^0(t_i)$ согласно правилу

$$u_*^0(t) = \begin{cases} u_*, & t \in [t_*, t_1], \\ u_*^0(t_i), & \text{при } t \in [t_i, t_{i+1}), i \in \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

$$u_*^0(t_i) \in \operatorname{Arg}\min_{u \in P}\{\|f(t_i, x_1(t_i), u) - f_i^{j^0}\| + |g(t_i, x_1(t_i), u) - g_i^{j^0})|\},$$

Во втором параграфе доказывается теорема об оценке точности алгоритма. Определяется результат реализации сеточного оптимального синтеза

$$\widetilde{C}_\Gamma\big(t_0, x_0; u_*^0(\cdot)\big) = \sigma\big(x_*^0(T)\big) + \Delta t \sum_{\substack{\tau \in \Gamma, \\ \tau = t_0}}^{T} g\big(\tau, x_*^0(\tau), u_*^0(\tau)\big),$$

совпадающий с численной аппроксимацией функционала $I\big(t_0, x_0; u_*^0(\cdot)\big)$ (2).

Теорема 6. *В задаче* (1)–(4) *при выполнении условий* A_1'–A_5' *для любой компактной области* $G_0 \subset \operatorname{cl}\Pi_T$ *и любого параметра* $\varepsilon > 0$ *существуют константы* $H_1^\varepsilon(G_0) > 0$, $H_2^\varepsilon(G_0) > 0$ *такие, что для произвольной точки* $(t_*, x_*) \in G^\varepsilon(G_0)$ (11) *справедлива оценка*

$$\big|\widetilde{C}_\Gamma\big(t_*, x_*; u_*^0(\cdot)\big) - V(t_*, x_*)\big| \leq \Delta t H_1^\varepsilon(G_0) + d_0 H_2^\varepsilon(G_0).$$

Здесь d_0 определено в (15).

В третьем параграфе приводятся примеры решения модельных задач оптимального управления с помощью сеточного оптимального синтеза.

В пятой главе исследуется модель макроэкономической системы, предложенная Э.Г. Альбрехтом[10].

В первом параграфе описывается модель Э.Г. Альбрехта. Символ p обозначает конечный валовый продукт, q обозначает материальные затраты.

[10] Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Электронный журнал "Исследовано в России". 2002. Т. 5. С. 54–86

Предполагается, что прибыль h зависит только от валового продукта и материальных затрат, т.е. $h = G(p,q)$. Функция $G(p,q)$ называется макроэкономическим потенциалом системы.

Динамика рассматриваемая модели имеет следующий вид:

$$\frac{dp}{dt} = u_1 \frac{\partial G(p,q)}{\partial p}, \qquad \frac{dq}{dt} = u_2 \frac{\partial G(p,q)}{\partial q} \tag{16}$$

на временном интервале $[0,T]$. Здесь u_1, u_2 — управляющие параметры, удовлетворяющие геометрическим ограничениям

$$|u_1| \leq U_1, \qquad |u_2| \leq U_2, \tag{17}$$

где $U_1 > 0$, $U_2 > 0$ — константы.

Имеются статистические данные, а именно, таблица значений величин p, q, h, измеренных в моменты $t_i \in [0,T]$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$:

$$p_0^*, \; p_1^*, \ldots, \; p_N^*, \quad q_0^*, \; q_1^*, \ldots, \; q_N^*, \quad h_0^*, \; h_1^*, \ldots, \; h_N^*.$$

Статистические данные (p_i^*, q_i^*) измерены с ошибками и известны оценки ошибок измерения

$$|p - p_i^*| \leq \Delta p, \qquad |q - q_i^*| \leq \Delta q.$$

Символами $\tilde{p}^*(\cdot)$, $\tilde{q}^*(\cdot)$ обозначаются линейные интерполяции статистических данных на отрезке $[0,T]$. Вводится область допустимых движений D:

$$D = \{(t,p,q) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in [0,T], \; |p - \tilde{p}^*(t)| \leq \Delta p, \; |q - \tilde{q}^*(t)| \leq \Delta q\}. \tag{18}$$

Предполагается, что структура функции $G(p,q)$ имеет вид многочлена

$$G(p,q) = pq[a^0 + a^1 p + a^2 q]. \tag{19}$$

Во втором параграфе ставится задача восстановления динамики системы по заданным статистическим данным.

Первым шагом является определение параметров макроэкономического потенциала, наилучшим образом соответствующим статистическим данным. Рассматривается задача идентификации параметров a^0, a^1, a^2, определяющих вид макроэкономического потенциала $G(p,q)$ (19). Для получения наилучшего соответствия статистическим данным применяется метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=0}^{N} [h_i^* - G(p_i^*, q_i^*)]^2 \longrightarrow \min_{(a^j)}.$$

Далее ставится вспомогательная задача оптимального управления динамикой модели (16), где множество допустимых управлений определяется следующим образом $U(0,T) = \{\forall u(\cdot)\colon [0,T] \to P$ — измерима$\}$, а функционал платы имеет вид:

$$I\big(t_0, p_0, q_0; u(\cdot)\big) = (\tilde{p}^*(T) - p(T))^2 + (\tilde{q}^*(T) - q(T))^2 + \\ + \int_{t_0}^{T} \left[(\tilde{p}^*(t) - p(t))^2 + (\tilde{q}^*(t) - q(t))^2 + \varepsilon \frac{(u_1^2(t) + u_2^2(t))}{2} \right] dt, \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации. Величина $\varepsilon \frac{(u_1^2(t)+u_2^2(t))}{2}$ вводится для того, чтобы обеспечить выполнение условия A_3' для рассматриваемой задачи оптимального управления. Функции $\tilde{p}^*(\cdot)$, $\tilde{q}^*(\cdot)$ — линейные интерполяции статистических данных.

Ставится задача о нахождении оптимального синтеза — универсального позиционного управления, оптимального для всех заданных начальных состояний. Траектории, порождаемые оптимальным синтезом и содержащиеся в области допустимых движений, являются решением задачи о восстановлении динамики системы по заданным статистическим данным.

В третьем параграфе описывается алгоритм численного решения задачи о восстановлении движений модели.

В момент $t = t_N = T$ задается область $\hat{G}_N \in \mathbb{R}^2$ вида

$$\hat{G}_N = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |p - p_N^*| \leq \Delta p, \ |q - q_N^*| \leq \Delta q\},$$

на области $\hat{G}_N$ задается сетка $Q(t_N)$ с шагом Δ_N. Для узлов $(p_i^N, q_j^N) \in Q(t_N)$ в обратном времени строятся траектории $p(\cdot; p_i^N)$, $q(\cdot; q_j^N)$ — оптимали системы (16), выходящие в момент $t_N = T$ из состояний

$$p(t_N) = p_i^N, \qquad q(t_N) = q_j^N.$$

Построенные траектории $p(\cdot; p_i^N)$, $q(\cdot; q_j^N)$ используются для построения оптимального сеточного синтеза $u_*^0(\cdot)$ в узлах сеток $Q(t_k)$, $k = N, \dots, 1$.

В момент $t = 0$ рассматриваются сечение $\hat{G}_0 \in \mathbb{R}^2$ области допустимых движение D (18) и сетка с шагом Δ_0. Для узлов $(p_i^0, q_j^0) \in \hat{G}_0$ как для начальных состояний в прямом времени строятся траектории $p(\cdot; p_i^0)$, $q(\cdot; q_j^0)$ под управлением сеточного оптимального синтеза.

Затем среди движений $p(\cdot; p_i^0)$, $q(\cdot; q_j^0)$ выбираются те, для которых выполняется условие

$$\big(t_k, p(t_k; p_i^0), q(t_k; q_j^0)\big) \in D, \quad k = 0, \dots, N.$$

Таких движений может быть несколько (если таких нет, то расширяем область допустимых движений D). Из них выбираются окончательно те, на которых функционал (20) достигает минимума. Эти функции $p(\cdot; p_i^0)$, $q(\cdot; q_j^0)$ называются решениями задачи о восстановлении движений модели.

В четвертом параграфе задача численно решается при конкретных статистических данных.

Список основных публикаций

1. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Алгоритм построения минимаксного решения уравнения Беллмана в задаче Коши с дополнительными огра-

ничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 208–215.

2. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Оптимальный синтез в задаче управления с липшицевыми входными данными // Тр. МИАН. 2008. Т. 262, № 1. С. 240–252.

3. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Об эффективности сеточного оптимального синтеза в задачах оптимального управления с фиксированным моментом окончания // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1651–1662.

4. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Оценка погрешности сеточного оптимального синтеза в нелинейных задачах оптимального управления предписанной продолжительности // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 9. С. 141–156.

5. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Тр. МИАН. 2010. Т. 271. С. 259–277.

6. Subbotina N. N., Tokmantsev T. B. On Solutions of Optimal Control Problems of Prescribed Duration on the Plane // Advances in Mechanics. Dynamics and Control: Proceedings of the 14th International Workshop on Dynamics and Control. Moscow: Nauka, 2008. P. 281–288.

7. Subbotina N. N., Tokmantsev T. B. On Grid Optimal Feedbacks to Control Problems of Prescribed Duration on the Plane // Advances in Dynamic Games. Vol. 11 of Annals of the ISDG. 2011. P. 133–147.

8. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. О вычислении оптимального результата в задачах управления на заданном отрезке времени // Тр. III Между-

народ. конф. “Параллельные вычисления и задачи управления”. Москва: ИПУ, 2006. С. 101–112.

9. Токманцев Т. Б. О построении оптимального синтеза в задаче управления механической системой на фиксированном отрезке времени // Тр. IX Международ. Четаевской конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”. Т. 3. Иркутск: ИДСТУ, 2007. С. 231–239.

10. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Численная аппроксимация минимаксного решения уравнения Беллмана в задаче Коши с дополнительными ограничениями // Тр. 37–й Региональной молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. С. 357–361.

11. Токманцев Т. Б. О некоторых способах обработки и хранения информации при решении задач динамической оптимизации на заданном отрезке времени // Тр. 38–й Региональной молодежной конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 311–315.

12. Токманцев Т. Б. О численном решении задач оптимального управления предписанной продолжительности // Вестник Тамбовского Университета: Естественные и технические науки. 2007. Т. 12(4). С. 534–535.

13. Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б. Метод обобщенных характеристик в задаче оптимального управления с липшицевыми входными данными // Известия Института математики и информатики. 2006. С. 141–142.

14. Subbotina N. N., Tokmantsev T. B. The Method of Characteristics in Macroeconomic Modeling // Contributions to Game Theory and Management. Vol. 3. St. Petersburg: Graduated School of Management, 2009. Pp. 399–408.

10

Токманцев Тимофей Борисович

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Автореферат

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16. Объем 1 п.л.

Тираж 150 экз. Заказ № 2772

Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
тел. (343) 362-91-16, 362-91-17